**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

• όλες οι συναρτήσεις της μορφής G(x)=F(x)+c, c∈R είναι παράγουσες της f στο Δ, και

• κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή G(x)=F(x)+c, c∈R.

**Μονάδες 7**

**Α2.** Πότε μια συνάρτηση f:Α→R λέγεται συνάρτηση 1-1;

**Μονάδες 4**

**Α3.** Πότε μια ευθεία x=x0 λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

**Μονάδες 4**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστή, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν z∈C, τότε , όπου ν θετικός ακέραιος.

**β)** Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x0 και ισχύει f(x)≤g(x) κοντά στο x0, τότε 

**γ)** Αν , τότε f(x)>0 κοντά στο x0

**δ)** Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

**ε)** Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β] και G είναι μία παράγουσα της f στο [α, β], τότε πάντοτε ισχύει:



**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους ισχύουν:

• |z-3i|2-18=|z-3|2

• |w-i|=Im(w)+1

**Β1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η ευθεία με εξίσωση x-y-3=0

**Μονάδες 9**

**Β2.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι η παραβολή με εξίσωση 

**Μονάδες 9**

**Β3.** Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου |z-w|.

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση f(x)=ex-1-lnx, x∈(0, +∝)

**Γ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g με , όπου h(x)=f(x2+1)-f(2)+1.

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση



έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες x1,x2.

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Αν για τις ρίζες x1, x2 του ερωτήματος Γ3 ισχύει ότι x1<x2, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ∈ (x1, 1) τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (ξ, f(ξ)) να διέρχεται από το σημείο 

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f: (0, +∝)→ R για την οποία ισχύει:

, για κάθε x∈(0, +∝)

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι 

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι , για κάθε x∈(0, +∝)

**Μονάδες 4**

**Δ3. α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

, x∈(0, +∝)

είναι κοίλη.

(μονάδες 5)

**β.** Έστω Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, της εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο που η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα x΄x και την ευθεία x=3. Να αποδείξετε ότι Ε<2.

(μονάδες 4)

**Μονάδες 9**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι

, για κάθε x∈(0, +∝).

**Μονάδες 6**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 304.

**Α2.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 152.

**Α3.**Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 279.

**Α4. α.** Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Λάθος, **ε.** Λάθος

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1.** Έστω z=x+yi (x, y∈R), τότε έχουμε διαδοχικά









Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η ευθεία x-y-3=0.

**Β2.** Έστω w=x+yi (x, y∈R), τότε έχουμε διαδοχικά









Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι η παραβολή .

**Β3.** Έστω Μ(x0, y0) τυχαίο σημείο της παραβολής.

Άρα έχουμε .

Οι αποστάσεις του σημείου Μ από την ευθεία (ε)x-y-3=0 είναι



Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση , x∈R αυτή είναι η παραγωγίσιμη (ως πολυωνυμική) και έχουμε



Οι ρίζες και το πρόσημο της f΄(x) φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x -∝ 2 +∝

f΄(x) - 0 +

f(x)

ελ.

Άρα η συνάρτηση f έχει ελάχιστο στο σημείο x0=2, το f(2)=4-8+12=8.

Επομένως η ελάχιστη απόσταση |z-w| είναι

.

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Η συνάρτηση , x∈(0, +∝) είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∝) (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με , x∈ (0, +∝).

Αρκεί να εξετάσουμε το πρόσημο της συνάρτησης , (0, +∝).

Η συνάρτηση , (0, +∝) είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∝) (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με φ΄(x)=ex-1(x+1)>0, x∈(0, +∝) και άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης η φ έχει ρίζα το 1 αφού φ(1)=0.

Τώρα έχουμε

•  και άρα η f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [1, +∝).

• και άρα η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0, 1].

Για το σύνολο τιμών της Α έχουμε .

Είναι

• , αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [1, +∝) και έχουμε

f(1)=0







• , αφού η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0, 1] και 

Επομένως το σύνολο τομών της f είναι Α=[1, +∝).

**Γ2.** Η συνάρτηση  ορίζεται όταν . Το πεδίο ορισμού της h(x) είναι το R.

Επειδή 1∈[1, +∝) θα πρέπει





 (αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο [1, +∝) και x2+1,2∈[1, +∝))

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το Α=(-∝, -1]∪[1, +∝).

**Γ3.** Επειδή η συνάρτηση η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0, 1] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [1, +∝) θα είναι και «1-1» στα διαστήματά αυτά. Επομένως έχουμε διαδοχικά



Όμως

•  και άρα υπάρχει x1∈[1, +∝) (μοναδικό) τέτοιο, ώστε 

•  και άρα υπάρχει x2∈(0, 1) (μοναδικό) τέτοιο, ώστε .

Επομένως υπάρχουν x1, x2>0 που να είναι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης.

**Γ4.** Η εξίσωση της εφαπτομένης Cf στο σημείο (ξ, f(ξ)) είναι y-f(ξ)=f΄(ξ)(x-ξ) και αφού αυτή διέρχεται από το σημείο  θα έχουμε:



Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση , x∈[x1, 1] έχει μοναδική ρίζα ξ∈(x1, 1).

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα του Bolzano για τη συνάρτηση Π(x) στο διάστημα [x1, 1]:

Έχουμε:

• Η Π(x) είναι συνεχής στο διάστημα [x1, 1] (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων).

• Π(1)=

•  (αφού η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1)) 

*ΣΗΜΕΙΩΣΗ:*

Η f΄ είναι παραγωγίσιμη στο (0, 1) με , x∈(0, 1)

Άρα η Π(x) έχει μία τουλάχιστον ρίζα ξ∈(x1,1) και επειδή η Π(x) είναι παραγωσίσιμη στο (x1, 1) (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

, x∈[x1, 1], η Π(x) είναι γνησίως αύξουσα άρα και «1-1». Επομένως η ρίζα ξ∈(x1, 1) είναι μοναδική.

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Εχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα



, x>0



Οπότε c μια σταθερά. Είναι  και άρα έχουμε

, για 0<x≠1. Για x=1, η αρχική σχέση δίνει f(1)=0.

Επομένως



**Δ2.** Θεωρούμε τη συνάρτηση:

, x>0

Η συνάρτηση F(x) είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∝) (ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων), αφού οι συναρτήσεις  είναι συνεχής στο (0, +∝).

Είναι:

, x∈(0, +∝)

• Για 0<x≠1 έχουμε



• Για x=1⇔F΄(1)=f(1)-f(1)=0

Άρα F΄(x) =0, x∈(0, +∝) και επομένως F(x) =c, όπου c σταθερά.

Είναι F(1)=c⇔c=0

Επομένως



**Δ3. α.** Η g είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∝) διότι  είναι συνεχής (ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων) και άρα έχουμε

, x∈(0, +∝)

, 0<x≠1

Για x=1 έχουμε



Άρα



Η f είναι παραγωγίσιμη για 0<x≠1 (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με

, 0<x≠1 και





Θεωρούμε τη συνάρτηση A(x)=x-1-xlnx, x>0 η οποία είναι παραγωγίσιμη για κάθε x>0 (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με Α΄(x)=1-lnx-1= -lnx, x>0.

Έχουμε









Επομένως g΄΄(x)<0 για κάθε x>0 και άρα η συνάρτηση g είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο (0, +∝) (για x=1, A(1)=0)

**β.** Η Cf τέμνει τον άξονα των x΄x όταν  (είναι μοναδική αφού η g είναι «1-1» ως γνησίως αύξουσα διότι είναι

 με f(x)>0 για κάθε x>0

[*ΣΗΜΕΙΩΣΗ:*

Είναι

•  και , άρα ) και

• 0<x<1⇔(lnx<0 και x-1<0, άρα >0)]

Άρα το σημείο τομής της Cg με τον άξονα των x΄x είναι Α(1, 0) και είναι μοναδικό.

Η εφαπτομένη της Cg στο Α(1, 0) είναι



Το εμβαδόν που περικλείεται από τη Cg, την παραπάνω ευθεία και τις ευθείας x=1 και x=3 είναι

(επειδή η συνάρτηση g είναι κοίλη στο (1, 3) θα έχουμε g(x)≤x-1, x∈(1, 3).

Για το ζητούμενο ισχύει ισοδύναμα



Η τελευταία σχέση είναι αληθής διότι:

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο [1, 3] και άρα

, x∈[1, 3] (η ισότητα ισχύει μόνο για x=1)

Η g δεν είναι παντού μηδέν και είναι συνεχής στο διάστημα [1, 3], επομένως ισχύει , που ήταν το ζητούμενο.

**Δ4.** Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα







 (1)

Τώρα έχουμε

 για κάθε t>0 και

• x=1 η σχέση (1) ως ισότητα, αφού τότε 

• Για  είναι:  και άρα (x-t)f(t)≥0 και η συνάρτηση ,  είναι συνεχής και όχι παντού μηδέν.

Επομένως



• Για 0<x<1⇔>x είναι  και άρα (x-t)f(t)≤0 και η συνάρτηση ,  είναι συνεχής και όχι παντού μηδέν.

Επομένως



Επομένως σε κάθε περίπτωση είναι

, για κάθε x>0.

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

**«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ**

[**www.floropoulos.gr**](http://www.floropoulos.gr)

**ΚΟΥΣΗΣ Π. - ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΦΩΤΟΥ Φ.**